Publication: lifemater.com, Author: peekAboo
Creation: 2022/4/15

弾性係数と弾性スティフネス

1. ヤング率と弾性コンプライアンス

弾性変形を考えると、Hooke の法則から以下の式が成立する。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}, \tag{1-1}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ 2\boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix}, \tag{1-2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \tag{1-3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \sigma_{23} & \sigma_{31} & \sigma_{12} \end{bmatrix}, \tag{1-4}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \tag{1-5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \varepsilon_{23} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \tag{1-6}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{3311} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{1131} & C_{2231} & C_{3331} & C_{2331} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{3112} & C_{1212} \end{bmatrix}, \tag{1-7}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{3311} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} \\ S_{3311} & S_{2233} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3331} & S_{3312} \\ S_{1123} & S_{2223} & S_{3323} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} \\ S_{1131} & S_{2231} & S_{3331} & S_{2331} & S_{3131} & S_{3112} \\ S_{1112} & S_{2212} & S_{3312} & S_{2312} & S_{3112} & S_{1212} \end{bmatrix}, \tag{1-8}$$

ここで、C_{ijkl} は弾性スティフネス、S_{ijkl} は弾性コンプライアンス、σ_{ij} は応力、ε_{ij} は弾性ひずみであり、部分行列は3×3の行列である。

一軸引張試験（x_1 軸）を考えると、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ 2\boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1-9}$$

となるので、Eq. (1-1)に代入すると、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{3311} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} \\ S_{3311} & S_{2233} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3331} & S_{3312} \\ S_{1123} & S_{2223} & S_{3323} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} \\ S_{1131} & S_{2231} & S_{3331} & S_{2331} & S_{3131} & S_{3112} \\ S_{1112} & S_{2212} & S_{3312} & S_{2312} & S_{3112} & S_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} S_{1111}\sigma & S_{1122}\sigma & S_{3311}\sigma & S_{1123}\sigma & S_{1131}\sigma & S_{1112}\sigma \end{bmatrix}$$

となる。つまり、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} S_{1111}\sigma & S_{1122}\sigma & S_{3311}\sigma & S_{1123}\sigma & S_{1131}\sigma & S_{1112}\sigma \end{bmatrix}, \tag{1-10}$$

となる。

この時、ヤング率（縦弾性係数）E について以下の式が成立する。

$$\sigma = E\varepsilon_{11}, \tag{1-11}$$

Eq. (1-10)より、

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma,$$

となるので、Eq. (1-11)と比較すると、E は以下の式が得られる。

$$E = \frac{1}{S_{1111}}. \tag{1-12}$$

2. ポアソン比と弾性コンプライアンス

ポアソン比 ν_2, ν_3 は、以下の式で定義される。

$$\nu_2 = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}, \tag{2-1}$$

$$\nu_3 = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}. \tag{2-2}$$

Eq. (1-10)に代入すると、以下のように計算できる。

$$\nu_2 = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{S_{1122}\sigma}{S_{1111}\sigma} = -\frac{S_{1122}}{S_{1111}},$$

$$\nu_3 = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{S_{3311}\sigma}{S_{1111}\sigma} = -\frac{S_{3311}}{S_{1111}}.$$

つまり、

$$\nu_2 = -\frac{S_{1122}}{S_{1111}}, \tag{2-3}$$

$$\nu_3 = -\frac{S_{3311}}{S_{1111}}, \tag{2-4}$$

となる。

3. せん断弾性係数と弾性コンプライアンス

以下のような、せん断応力τを作用させる変形を考える。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ 2\boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} = {}^{t}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\tau & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3-1}$$

Eq. (1-2)に代入すると、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{3311} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} \\ S_{3311} & S_{2233} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3331} & S_{3312} \\ S_{1123} & S_{2223} & S_{3323} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} \\ S_{1131} & S_{2231} & S_{3331} & S_{2331} & S_{3131} & S_{3112} \\ S_{1112} & S_{2212} & S_{3312} & S_{2312} & S_{3112} & S_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$= {}^{t}\begin{bmatrix} S_{1123}2\tau & S_{2223}2\tau & S_{3323}2\tau & S_{2323}2\tau & S_{23131}2\tau & S_{2312}2\tau \end{bmatrix}$$

となる。よって、

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix} = {}^{t}\left[S_{1123}2\tau \quad S_{2223}2\tau \quad S_{3323}2\tau \quad S_{2323}2\tau \quad S_{23131}2\tau \quad S_{2312}2\tau\right], \tag{3-2}$$

となる。

せん断弾性係数（横弾性係数、剛性率）G は、以下の式で与えられる。

$$\tau = G\gamma_{23} = G2\varepsilon_{23}. \tag{3-3}$$

ここで、γ_{23} は工業ひずみである。Eq. (3-2)より、

$$\varepsilon_{23} = 2S_{2323}\tau\,,$$

$$\tau = \frac{1}{2S_{2323}}\varepsilon_{23} = \frac{1}{4}\frac{1}{S_{2323}}2\varepsilon_{23}$$

となるので、Eq. (3-3)と比較すると、

$$G = \frac{1}{4}\frac{1}{S_{2323}}, \tag{3-4}$$

となる。

4. 等方弾性体の場合の弾性係数と弾性スティフネス

等方弾性体では、

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu\end{bmatrix}, \tag{4-1}$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{O}, \tag{4-2}$$

$$\mathbf{C}_3 = \mu\mathbf{E}, \tag{4-3}$$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\begin{bmatrix}2(\lambda+\mu) & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2(\lambda+\mu) & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & 2(\lambda+\mu)\end{bmatrix}, \tag{4-4}$$

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{O}, \tag{4-5}$$

$$\mathbf{S}_3 = \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\mathbf{E}, \tag{4-6}$$

となる。Eq. (1-10)に代入すると、

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix} &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix}S_{1111}\sigma & S_{1122}\sigma & S_{3311}\sigma & S_{1123}\sigma & S_{1131}\sigma & S_{1112}\sigma\end{bmatrix} \\ &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix}S_{1111}\sigma & S_{1122}\sigma & S_{3311}\sigma & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \sigma\frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,{}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix}2(\lambda+\mu) & -\lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned},$$

となるので、

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix} = \sigma\frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,{}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix}2(\lambda+\mu) & -\lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{4-7}$$

となる。Eq. (1-11)を考えると、

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma,$$

より、

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \tag{4-8}$$

となる。

また、Eqs. (2-3, 2-4)に代入すると、

$$\nu_2 = -\frac{S_{1122}}{S_{1111}} = -\frac{-\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},$$

$$\nu_3 = -\frac{S_{3311}}{S_{1111}} = -\frac{-\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},$$

となり、

$$\nu = \nu_2 = \nu_3 = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \tag{4-9}$$

となる。

Eq. (3-2)に Eqs. (4-4 ~ 4-6)代入すると、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_{2323}2\tau & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\mu}2\tau & 0 & 0 \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mu}\tau & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

となるので、Eq. (3-3)と比較すると、

$$\gamma = 2\varepsilon_{23} = 2\frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\tau = \frac{1}{\mu}\tau,$$

より、

$$G = \mu, \tag{4-10}$$

となる。

ここで、Eq. (4-8)を変形すると、

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = \mu\left(\frac{2\lambda + 2\mu + \lambda}{\lambda + \mu}\right) = \mu\left(\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$$
$$= \mu\left(2 + 2\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\right)$$

となるので、Eqs. (4-9, 4-10)を代入すると、

$$E = \mu\left(2 + 2\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\right) = G(2 + 2\nu) = G2(1 + \nu),$$

となるので、

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \tag{4-11}$$

が成立する。