Publication: lifemater.com, Author: peekAboo
Creation: 2022/4/7

# 弾性コンプライアンス（直方晶・立方晶・等方弾性体）

## 1. 弾性コンプライアンス

弾性コンプライアンスを$S_{ijkl}$、弾性スティフネス$C_{ijkl}$とすると、

$$\mathbf{S}_1 = \left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\right)^{-1}, \tag{1-1}$$

$$\mathbf{S}_3 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{C}_3 - {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)^{-1}, \tag{1-2}$$

$$\mathbf{S}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1} = -2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3, \tag{1-3}$$

となる。ただし、

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} \end{bmatrix}, \tag{1-4}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \end{bmatrix}, \tag{1-5}$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix}, \tag{1-6}$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} \end{bmatrix}, \tag{1-7}$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} \\ S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} \\ S_{3323} & S_{3331} & S_{3312} \end{bmatrix}, \tag{1-8}$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} \\ S_{3123} & S_{3131} & S_{3112} \\ S_{1223} & S_{1231} & S_{1212} \end{bmatrix}, \tag{1-9}$$

$$\mathbf{C}_1 = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3 = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_3, \tag{1-10}$$

$$\mathbf{S}_1 = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3 = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_3, \tag{1-11}$$

である。

## 2. 直方晶

直方晶では、格子と平行に軸をとると、

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}, \tag{2-1}$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{O}, \tag{2-2}$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \tag{2-3}$$

となる。よって、Eqs. (1-1~1-3)は、

$$\mathbf{S}_1 = \left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\right)^{-1} = \left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{O}\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{O}\right)^{-1} = \left(\mathbf{C}_1\right)^{-1} = \mathbf{C}_1^{-1},$$

$$\mathbf{S}_3 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{C}_3 - {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)^{-1} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{C}_3 - {}^{\mathrm{t}}\mathbf{O}\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{O}\right)^{-1} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{C}_3\right)^{-1} = \frac{1}{4}\mathbf{C}_4^{-1},$$

$$\mathbf{S}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1} = -\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{O}\mathbf{C}_3^{-1} = \mathbf{O},$$

$$\mathbf{S}_2 = -2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3 = -2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{O}\mathbf{S}_3 = \mathbf{O},$$

となる。つまり、

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{C}_1^{-1}, \tag{2-4}$$

$$\mathbf{S}_3 = \frac{1}{4}\mathbf{C}_3^{-1}, \tag{2-5}$$

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{O}, \tag{2-6}$$

となる。

## 3. 立方晶

立方晶では、格子と平行に軸をとると、

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} \end{bmatrix}, \tag{3-1}$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{O}, \tag{3-2}$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} = C_{44}\mathbf{E}, \tag{3-3}$$

となる。よって、Eq. (2-5)は、

$$\mathbf{S}_3 = \frac{1}{4}\frac{1}{C_{44}}\mathbf{E}, \tag{3-4}$$

となる。

また、以下のような正規対称行列$\mathbf{A}$、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}, \tag{3-5}$$

を考えると、

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = a^3 + 2b^3 - 3ab^2 = a\left(a^2 - b^2\right) + 2b^2(b-a) \\ &= a(a-b)(a+b) - 2b^2(a-b) = (a-b)\left\{a(a+b) - 2b^2\right\} \\ &= (a-b)\left(a^2 + ab - 2b^2\right) = (a-b)(a-b)(a+2b) \\ &= (a-b)^2(a+2b)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cof}(\mathbf{A}) &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & a \\ b & b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & b \\ a & b \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -ab + b^2 & b^2 - ab \\ -ab + b^2 & a^2 - b^2 & -ab + b^2 \\ b^2 - ab & -ab + b^2 & a^2 - b^2 \end{bmatrix} \\ &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} (a-b)(a+b) & -b(a-b) & -b(a-b) \\ -b(a-b) & (a-b)(a+b) & -b(a-b) \\ -b(a-b) & -b(a-b) & (a-b)(a+b) \end{bmatrix} = (a-b)\begin{bmatrix} a+b & -b & -b \\ -b & a+b & -b \\ -b & -b & a+b \end{bmatrix}\end{aligned},$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det \mathbf{A}}\mathrm{cof}(\mathbf{A}) = \frac{1}{(a-b)^2(a+2b)}(a-b)\begin{bmatrix} a+b & -b & -b \\ -b & a+b & -b \\ -b & -b & a+b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(a-b)(a+2b)}\begin{bmatrix} a+b & -b & -b \\ -b & a+b & -b \\ -b & -b & a+b \end{bmatrix}\end{aligned},$$

つまり、

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a+2b)}\begin{bmatrix} a+b & -b & -b \\ -b & a+b & -b \\ -b & -b & a+b \end{bmatrix}, \tag{3-6}$$

となるので、Eq. (2-4)は、

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{C}_1^{-1} = \frac{1}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}\begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} & -C_{12} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{11} + C_{12} & -C_{12} \\ -C_{12} & -C_{12} & C_{11} + C_{12} \end{bmatrix},$$

となる。よって、

$$\mathbf{S}_1=\frac{1}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})}\begin{bmatrix} C_{11}+C_{12} & -C_{12} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{11}+C_{12} & -C_{12} \\ -C_{12} & -C_{12} & C_{11}+C_{12} \end{bmatrix}, \tag{3-7}$$

となる。

## 4. 等方弾性体

等方弾性体では、

$$C_{11}=\lambda+2\mu, \tag{4-1}$$

$$C_{12}=\lambda, \tag{4-2}$$

$$C_{44}=\mu, \tag{4-3}$$

となるので、

$$\mathbf{S}_3=\frac{1}{4}\frac{1}{C_{44}}\mathbf{E}=\frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\mathbf{E},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_1&=\frac{1}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})}\begin{bmatrix} C_{11}+C_{12} & -C_{12} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{11}+C_{12} & -C_{12} \\ -C_{12} & -C_{12} & C_{11}+C_{12} \end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{(\lambda+2\mu-\lambda)(\lambda+2\mu+2\lambda)}\begin{bmatrix} \lambda+2\mu+\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & \lambda+2\mu+\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & \lambda+2\mu+\lambda \end{bmatrix},\\ &=\frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\begin{bmatrix} 2(\lambda+\mu) & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2(\lambda+\mu) & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & 2(\lambda+\mu) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる。まとめると、以下の関係式が得られる。

$$\mathbf{S}_3=\frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\mathbf{E}, \tag{4-4}$$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \begin{bmatrix} 2(\lambda+\mu) & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2(\lambda+\mu) & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & 2(\lambda+\mu) \end{bmatrix}, \tag{4-5}$$