Publication: lifemater.com, Author: peekAboo
Creation: 2022/4/5

弾性コンプライアンス

1. 弾性コンプライアンスと Hooke の法則

本記事では、特に断らない限り Einstein の総和則を用いて式を記述する。ただし、1 つの項に同一の添え字が 3 つ以上存在する場合は、その添え字については Einstein の総和則を適用しない。

Hooke の法則の一般形として以下の式が成立する。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} . \tag{1-1}$$

ここで、σ_{ij} は応力、ε_{ij} はひずみ、C_{ijkl} は弾性スティフネスである。また、弾性コンプライアンス S_{ijkl} を用いると、Eq. (1-1)は以下のように表現できる。

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} . \tag{1-2}$$

σ_{ij}, ε_{ij}, C_{ijkl} について、基本的な対称性として以下の式が成立する。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} , \tag{1-3}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} , \tag{1-4}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} . \tag{1-5}$$

S_{ijkl} についても同様に以下の式が成立する。

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} = S_{klij} . \tag{1-6}$$

Voigt 表記を用いると、Eq. (1-1)は以下の式で表現できる。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}, \tag{1-7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \tag{1-8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \sigma_{23} & \sigma_{31} & \sigma_{12} \end{bmatrix}, \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \tag{1-10}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \varepsilon_{23} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \tag{1-11}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} \end{bmatrix}, \tag{1-12}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \end{bmatrix}, \tag{1-13}$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix}. \tag{1-14}$$

また、同様に Eq. (1-2)は以下の式で表現できる。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ 2\boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix}, \tag{1-15}$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} \end{bmatrix}, \tag{1-16}$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} \\ S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} \\ S_{3323} & S_{3331} & S_{3312} \end{bmatrix}, \tag{1-17}$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} \\ S_{3123} & S_{3131} & S_{3112} \\ S_{1223} & S_{1231} & S_{1212} \end{bmatrix}. \tag{1-18}$$

ここで、Eqs. (1-5, 1-6)より、

$$\mathbf{C}_1 = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3 = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_3, \tag{1-19}$$

$$\mathbf{S}_1 = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3 = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_3, \tag{1-20}$$

2. 弾性スティフネスから弾性コンプライアンスを求める

Eqs. (1-7, 1-15)を変形すると、以下の式が成立する。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 2\mathbf{C}_2 \\ {}^t\mathbf{C}_2 & 2\mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}, \tag{2-1}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 2\mathbf{S}_2 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & 2\mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix}. \tag{2-2}$$

Eq. (2-1)を Eq. (2-2)に代入すると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 2\mathbf{S}_2 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & 2\mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 2\mathbf{S}_2 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & 2\mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 2\mathbf{C}_2 \\ {}^t\mathbf{C}_2 & 2\mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_2\,{}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{S}_1 2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_2 2\mathbf{C}_3 \\ {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_3\,{}^t\mathbf{C}_2 & {}^t\mathbf{S}_2 2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3 2\mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_2\,{}^t\mathbf{C}_2 & 2\left(\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_2\mathbf{C}_3\right) \\ {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_3\,{}^t\mathbf{C}_2 & 2\left({}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。${}^t\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}$は C_{ijkl} によらず任意に定める事ができるので、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_2\,{}^t\mathbf{C}_2 & 2\left(\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_2\mathbf{C}_3\right) \\ {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_3\,{}^t\mathbf{C}_2 & 2\left({}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \tag{2-3}$$

となる。ここで、$\mathbf{E}$ は単位行列、$\mathbf{O}$ は零行列である。

$\mathbf{C}_1$ と $\mathbf{C}_3$ が正則行列であることに注意して各部分行列に関する関係式を計算する（$\mathbf{C}_2$ は正則行列とは言えない点に注意)。1 行 2 列の部分行列に注目すると、

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_2\mathbf{C}_3 = \mathbf{O} \\ &\mathbf{S}_2\mathbf{C}_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2 \quad , \\ &\mathbf{S}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1} \end{aligned}$$

となる。さらに、1 行 1 列の部分行列に注目すると、

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_2\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2 = \mathbf{E} \\
&\mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 + 2\left(-\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}\right){}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2 = \mathbf{E} \\
&\mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 - \mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2 = \mathbf{E} \\
&\mathbf{S}_1\left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\right) = \mathbf{E}
\end{aligned},
$$

となる。また、2 行 1 列の部分行列に注目すると、

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_3\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2 = \mathbf{O} \\
&{}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_2 = -2\mathbf{S}_3\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}
\end{aligned},
$$

となる。最後に 2 行 2 列の部分行列に注目すると、

$$
\begin{aligned}
&2\left({}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3\right) = \mathbf{E} \\
&2\left(-2\mathbf{S}_3\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3\right) = \mathbf{E}, \\
&\mathbf{S}_3\left\{4\left(\mathbf{C}_3 - {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)\right\} = \mathbf{E}
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
\mathbf{S}_1 = \left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\right)^{-1},
$$

$$
\mathbf{S}_3 = \left\{4\left(\mathbf{C}_3 - {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)\right\}^{-1} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{C}_3 - {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)^{-1},
$$

$$
\mathbf{S}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1},
$$

$$
{}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_2 = -2\mathbf{S}_3\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1},
$$

となる。つまり、整理すると弾性コンプライアンスは以下の式で与えられる。

$$
\mathbf{S}_1 = \left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\right)^{-1}, \tag{2-4}
$$

$$
\mathbf{S}_3 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{C}_3 - {}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)^{-1}, \tag{2-5}
$$

$$
\mathbf{S}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}, \tag{2-6}
$$

$$
{}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}_2 = -2\mathbf{S}_3\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}. \tag{2-7}
$$

3. 弾性コンプライアンスの算出（別の計算順序）

2 章とは逆に、Eq. (2-2)を Eq. (2-1)に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 2\mathbf{C}_2 \\ {}^t\mathbf{C}_2 & 2\mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 2\mathbf{C}_2 \\ {}^t\mathbf{C}_2 & 2\mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 2\mathbf{S}_2 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & 2\mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{C}_2\,{}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{C}_1 2\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{C}_2 2\mathbf{S}_3 \\ {}^t\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{C}_3\,{}^t\mathbf{S}_2 & {}^t\mathbf{C}_2 2\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{C}_3 2\mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{C}_2\,{}^t\mathbf{S}_2 & 2\left(\mathbf{C}_1\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3\right) \\ {}^t\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{C}_3\,{}^t\mathbf{S}_2 & 2\left({}^t\mathbf{C}_2\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{C}_3\mathbf{S}_3\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。${}^t\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 & \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix}$は$C_{ijkl}$によらず任意に定める事ができるので、

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{C}_2\,{}^t\mathbf{S}_2 & 2\left(\mathbf{C}_1\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3\right) \\ {}^t\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{C}_3\,{}^t\mathbf{S}_2 & 2\left({}^t\mathbf{C}_2\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{C}_3\mathbf{S}_3\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \tag{3-1}
$$

となる。

$\mathbf{C}_1$と$\mathbf{C}_3$が正則行列であることに注意して各部分行列に関する関係式を計算する。1 行 2 列の部分行列に注目すると、

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{C}_1\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3 = \mathbf{O} \\
&\mathbf{C}_1\mathbf{S}_2 = -2\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3 \\
&\mathbf{S}_2 = -2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3
\end{aligned},
$$

となる。さらに、2 行 2 列の部分行列に注目すると、

$$
\begin{aligned}
&2\left({}^t\mathbf{C}_2\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{C}_3\mathbf{S}_3\right) = \mathbf{E} \\
&2\left({}^t\mathbf{C}_2\left(-2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3\right) + 2\mathbf{C}_3\mathbf{S}_3\right) = \mathbf{E} \\
&4\left(-{}^t\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{S}_3\right) = \mathbf{E} \\
&4\left(\mathbf{C}_3 - {}^t\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)\mathbf{S}_3 = \mathbf{E}
\end{aligned},
$$

となる。また、2 行 1 列の部分行列に注目すると、

$$
\begin{aligned}
{}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{C}_3\,{}^{t}\mathbf{S}_2 &= \mathbf{O} \\
\mathbf{C}_3\,{}^{t}\mathbf{S}_2 &= -\frac{1}{2}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1 \quad , \\
{}^{t}\mathbf{S}_2 &= -\frac{1}{2}\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1
\end{aligned}
$$

となる。最後に 1 行 1 列の部分行列に注目すると、

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{C}_1\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{C}_2\,{}^{t}\mathbf{S}_2 = \mathbf{E} \\
&\mathbf{C}_1\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{C}_2\left(-\frac{1}{2}\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1\right) = \mathbf{E}, \\
&\left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\right)\mathbf{S}_1 = \mathbf{E}
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
\mathbf{S}_1 = \left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\right)^{-1},
$$

$$
\mathbf{S}_3 = \left\{4\left(\mathbf{C}_3 - {}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)\right\}^{-1} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{C}_3 - {}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)^{-1},
$$

$$
\mathbf{S}_2 = -2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3,
$$

$$
{}^{t}\mathbf{S}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1,
$$

となる。つまり、整理すると Eqs. (2-4, 2-6)と、

$$
\mathbf{S}_2 = -2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3, \tag{3-2}
$$

$$
{}^{t}\mathbf{S}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1. \tag{3-3}
$$

が得られる。
　ここで、任意の正方行列 **A, B** に関する関係式、

$$
{}^{t}(\mathbf{AB}) = {}^{t}\mathbf{B}\,{}^{t}\mathbf{A}, \tag{3-4}
$$

$$
{}^{t}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = {}^{t}\mathbf{A} + {}^{t}\mathbf{B}, \tag{3-5}
$$

と、正則行列 **A, B** に関する関係式、

$$
{}^{t}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)=\left({}^{t}\mathbf{A}\right)^{-1}, \tag{3-6}
$$

$$
\left(\mathbf{AB}\right)^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \tag{3-7}
$$

を用いると、

$$
\begin{aligned}
{}^{t}\mathbf{S}_2 &= {}^{t}\left(-2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3\right)=-2\,{}^{t}\left(\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3\right)\\
&=-2\,{}^{t}\left(\mathbf{S}_3\right){}^{t}\left(\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\right)=-2\mathbf{S}_3\,{}^{t}\left(\mathbf{C}_2\right){}^{t}\left(\mathbf{C}_1^{-1}\right),\\
&=-2\mathbf{S}_3\,{}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_2 &= {}^{t}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1\right)=-\frac{1}{2}\,{}^{t}\left(\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_1\right)\\
&=-\frac{1}{2}\,{}^{t}\left(\mathbf{S}_1\right){}^{t}\left(\mathbf{C}_3^{-1}\,{}^{t}\mathbf{C}_2\right)=-\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\,{}^{t}\left({}^{t}\mathbf{C}_2\right){}^{t}\left(\mathbf{C}_3^{-1}\right),\\
&=-\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}
\end{aligned}
$$

となるので、Eq. (3-2)と Eq. (2-7)、Eq. (3-3)と Eq. (2-6)がそれぞれ等しいことが確認できる。また、Eq. (3-2)と Eq. (2-6)も等しいはずなので、

$$
2\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3=\frac{1}{2}\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1},
$$

つまり、

$$
\mathbf{S}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3^{-1}=4\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{S}_3\,. \tag{3-8}
$$

が成立していると考えられる。

4. 9×9 行列での表現

Eqs. (2-1, 2-2)は 9×9 の行列を用いると以下のように表現できる。

$$
\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_1\\ \boldsymbol{\sigma}_2\\ \boldsymbol{\sigma}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2\\ {}^{t}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\\ {}^{t}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix}, \tag{4-1}
$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix}. \tag{4-2}$$

Eq. (4-2)に Eq. (4-1)を代入すると、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2 \\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3 \\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix},$$

となる。ここで、Eqs. (2-3)を用いると、

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3 \\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2 \\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3 \\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_2\,{}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{S}_1\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_2\mathbf{C}_3 & \mathbf{S}_1\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_2\mathbf{C}_3 \\ {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_3\,{}^t\mathbf{C}_2 & {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3 & {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3 \\ {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_3\,{}^t\mathbf{C}_2 & {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3 & {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_2\,{}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{S}_1\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_2\mathbf{C}_3 & \mathbf{S}_1\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_2\mathbf{C}_3 \\ {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_3\,{}^t\mathbf{C}_2 & \frac{1}{2}2\left({}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3\right) & \frac{1}{2}2\left({}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3\right) \\ {}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{S}_3\,{}^t\mathbf{C}_2 & \frac{1}{2}2\left({}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3\right) & \frac{1}{2}2\left({}^t\mathbf{S}_2\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{C}_3\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{E} \\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{E} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2\\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3\\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2\\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{E}\\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \frac{1}{2}\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\frac{1}{2}\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \frac{1}{2}\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\frac{1}{2}\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix}$$

となることが確認できる。また、同様にして、

$$\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2\\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2\\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3\\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{E}\\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{E}\end{bmatrix},$$

となるので、

$$\begin{bmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2\\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3\\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2\\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2\\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\\ {}^t\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2\\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3\\ {}^t\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{E}\\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{E}\end{bmatrix}, \text{(4-3)}$$

となる。このように、9×9 の行列として記述した、弾性コンプライアンス行列は弾性スティフネス行列の逆行列ではない。