CC BY NC SA

Publication: lifemater.com, Author: peekAboo
Creation: 2022/3/11, Update: 2022/3/16

弾性定数の対称性

（直方晶、正方晶、立方晶、等方弾性体）

1. 直方晶の弾性定数

本記事では、特に断らない限り Einstein の総和則を用いて式を記述する。ただし、1 つの項に同一の添え字が 3 つ以上存在する場合はその添え字については Einstein の総和則を適用しない。

弾性定数 C_{ijkl} について、基本的な対称性として以下の式が成立する。

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \ . \tag{1-1}$$

C_{ijkl} の座標変換を考えると、以下の式が成立する。

$$C'_{ijkl} = C_{mnpq} l_{im} l_{jn} l_{kp} l_{lq} \ , \tag{1-2}$$

$$l_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j \ . \tag{1-3}$$

ここで、C'_{ijkl} は座標変換後の弾性定数、$\mathbf{e}'_i$ は座標変換後の x'_i 軸の単位方向ベクトル、$\mathbf{e}_i$ は座標変換前の x_i 軸の単位方向ベクトルである。

直方晶系では、任意の x_i 軸での反転に対して対称である。ある x_i 軸についての反転を考えると、

$$l_{ii} = -1 \ , \tag{1-4}$$

$$l_{(i+1)(i+1)} = l_{(i+2)(i+2)} = 1 \ , \tag{1-5}$$

$$l_{ij} = l_{ii} \delta_{ij} \ , \tag{1-6}$$

となる（Einstein の総和則を適用しない）。ここで、δ_{ij} は Kronecker のデルタである。また、下付き添え字については、

cc BY NC SA

$$2+2=3+1\rightarrow 1, \tag{1-7}$$

$$3+2\rightarrow 2, \tag{1-8}$$

とする。

Eq. (1-2)に Eq. (1-6)を代入すると、

$$\begin{aligned} C'_{rskl} &= C_{mnpq} l_{rm} l_{sn} l_{kp} l_{lq} = C_{mnpq} l_{rr} \delta_{rm} l_{ss} \delta_{sn} l_{kk} \delta_{kp} l_{ll} \delta_{lq} \\ &= C_{rskl} l_{rr} l_{ss} l_{kk} l_{ll} \end{aligned},$$

が成立する。つまり、

$$C'_{rskl} = C_{rskl} l_{rr} l_{ss} l_{kk} l_{ll}, \tag{1-9}$$

となる。前述の通り、直方晶系ではこの座標変換に対して不変であるので、

$$C'_{rskl} = C_{rskl} \tag{1-10}$$

が成立するため、

$$C_{rskl} l_{rr} l_{ss} l_{kk} l_{ll} = C_{rskl}, \tag{1-11}$$

となる。ここで、 $j \neq i, k \neq i, k \neq j$ とすると、Eqs. (1-4, 1-5)より、

$$l_{ii} l_{jj} l_{jj} l_{jj} = l_{ii} l_{jj} l_{jj} l_{kk} = l_{ii} l_{ii} l_{ii} l_{jj} = -1, \tag{1-12}$$

$$\text{Others} = 1, \tag{1-13}$$

となる（Einstein の総和則を適用しない）。r, s, k, l が Eq. (1-12)を満たす場合、

$$C_{rskl} = -C_{rskl},$$

となるので、

$$C_{rskl} = 0,$$

となる。よって、

$$C_{ijjj} = C_{ijjk} = C_{iiij} = 0, \tag{1-14}$$

が成立する（Einstein の総和則を適用しない）。Voigt 表記を用いれば、

cc BY NC SA

$$
\mathbf{C}=\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112}\\
C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212}\\
C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312}\\
C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312}\\
C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112}\\
C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212}
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{3311} & 0 & 0 & 0\\
C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0\\
C_{3311} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212}
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{31} & 0 & 0 & 0\\
C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\
C_{31} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}
\end{bmatrix},
$$

つまり、

$$
\mathbf{C}=\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{3311} & 0 & 0 & 0\\
C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0\\
C_{3311} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212}
\end{bmatrix},
=\begin{bmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{31} & 0 & 0 & 0\\
C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\
C_{31} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}
\end{bmatrix}
\tag{1-15}
$$

となり、独立な成分は 9 個となる。

CC BY NC SA

2. 正方晶の弾性定数

正方晶系では、1 章の議論に加えて、x_1 軸と x_2 軸の入れ替えに対して対称である。x_1 軸と x_2 軸を入れ替えた座標への座標変換を考えると、

$$l_{12} = l_{21} = l_{33} = 1, \tag{2-1}$$

$$\text{Others} = 0, \tag{2-2}$$

となる。Eq. (1-15)で非 0 の値について、Eqs. (1-2, 1-10)を考えると、

$$C_{1111} = C_{mnpq} l_{1m} l_{1n} l_{1p} l_{1q} = C_{2222} l_{12} l_{12} l_{12} l_{12} = C_{2222},$$

$$C_{3333} = C_{mnpq} l_{3m} l_{3n} l_{3p} l_{3q} = C_{3333} l_{33} l_{33} l_{33} l_{33} = C_{3333},$$

$$C_{1122} = C_{mnpq} l_{1m} l_{1n} l_{2p} l_{2q} = C_{2211} l_{12} l_{12} l_{21} l_{21} = C_{2211},$$

$$C_{2233} = C_{mnpq} l_{2m} l_{2n} l_{3p} l_{3q} = C_{1133} l_{21} l_{21} l_{33} l_{33} = C_{1133} = C_{3311},$$

$$C_{1212} = C_{mnpq} l_{1m} l_{2n} l_{1p} l_{2q} = C_{2121} l_{12} l_{21} l_{12} l_{21} = C_{2121},$$

$$C_{2323} = C_{mnpq} l_{2m} l_{3n} l_{2p} l_{3q} = C_{1313} l_{21} l_{33} l_{21} l_{33} = C_{1313} = C_{3131},$$

となる。つまり、

$$C_{1111} = C_{2222}, \tag{2-3}$$

$$C_{2233} = C_{3311}, \tag{2-4}$$

$$C_{2323} = C_{3131}, \tag{2-5}$$

が正方晶では要請される。Voigt 表記を用いれば、

cc BY NC SA

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2233} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \\ =\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{23} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \tag{2-6}$$

となり、独立な成分は 6 個となる。

3. 立方晶の弾性定数

立方晶系では、2 章の議論に加えて、x_1 軸と x_3 軸の入れ替えに対して対称である。x_1 軸と x_3 軸を入れ替えた座標への座標変換を考えると、

$$l_{13}=l_{31}=l_{22}=1, \tag{3-1}$$

$$\text{Others}=0, \tag{3-2}$$

となる。Eq. (2-6)で非 0 の値について、Eqs. (1-2, 1-10)を考えると、

$$C_{1111}=C_{mnpq}l_{1m}l_{1n}l_{1p}l_{1q}=C_{3333}l_{13}l_{13}l_{13}l_{13}=C_{3333},$$

$$C_{1122}=C_{mnpq}l_{1m}l_{1n}l_{2p}l_{2q}=C_{3322}l_{13}l_{13}l_{22}l_{22}=C_{3322}=C_{2233},$$

$$C_{1212}=C_{mnpq}l_{1m}l_{2n}l_{1p}l_{2q}=C_{3232}l_{13}l_{22}l_{13}l_{22}=C_{3232}=C_{2323},$$

となる。つまり、

$$C_{1111}=C_{3333}, \tag{3-3}$$

$$C_{1122}=C_{2233}, \tag{3-4}$$

$$C_{1212}=C_{2323}, \tag{3-5}$$

が正方晶では要請される。Voigt 表記を用いれば、

cc BY NC SA

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}, \\ =\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \tag{3-6}$$

となり、独立な成分は 3 個となる。

4. 等方弾性体の弾性定数

等方弾性体では、回転に対して対称である。x_3 軸周りの回転を考えると、

$$l_{11}=\cos\theta, l_{12}=\sin\theta, l_{21}=-\sin\theta, l_{22}=\cos\theta, l_{33}=1, \tag{4-1}$$

$$\text{Others}=0, \tag{4-2}$$

となる。Eqs. (1-2, 1-10)を考えると、

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{mnpq}l_{1m}l_{1n}l_{1p}l_{1q} \\ &= \begin{pmatrix} C_{1111}l_{11}l_{11}l_{11}l_{11}+C_{2222}l_{12}l_{12}l_{12}l_{12} \\ +C_{1122}l_{11}l_{11}l_{12}l_{12}+C_{1212}l_{11}l_{12}l_{11}l_{12}+C_{2112}l_{12}l_{11}l_{11}l_{12} \\ +C_{1221}l_{11}l_{12}l_{12}l_{11}+C_{2121}l_{12}l_{11}l_{12}l_{11}+C_{2211}l_{12}l_{12}l_{11}l_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{1111}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right) \\ +2C_{1122}\cos^2\theta\sin^2\theta+4C_{1212}\cos^2\theta\sin^2\theta \end{pmatrix} \\ &= C_{1111}\left(\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\right)+2\left(C_{1122}+2C_{1212}\right)\cos^2\theta\sin^2\theta \\ &= C_{1111}\left(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta\right)+\left(C_{1122}+2C_{1212}\right)2\cos^2\theta\sin^2\theta \\ &= C_{1111}+\left(C_{1122}+2C_{1212}-C_{1111}\right)2\cos^2\theta\sin^2\theta \end{aligned},$$

が成立するので、

cc BY NC SA

$$\left(C_{1122}+2C_{1212}-C_{1111}\right)2\cos^2\theta\sin^2\theta=0,$$

となる。よって、

$$C_{1111}=C_{1122}+2C_{1212}, \tag{4-3}$$

が成立する。Voigt 表記を用いれば、

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}&=\begin{bmatrix} C_{1122}+2C_{1212} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122}+2C_{1212} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1122}+2C_{1212} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \\
&=\begin{bmatrix} C_{12}+2C_{44} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12}+2C_{44} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{12}+2C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \\
&=\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4-4}$$

となり、独立な成分は 2 個になる。ここで、λ, μ はラメ定数である。