共通接線と二相平衡（二元系合金）

1. 二相平衡の条件と共通接線

A-B 二元系合金において、α 相と β 相の二相が平衡している場合、以下の式が成立する。

$$\frac{\mathrm{d}g^{\alpha}}{\mathrm{d}c_{\mathrm{B}}^{\alpha}} = \frac{\mathrm{d}g^{\beta}}{\mathrm{d}c_{\mathrm{B}}^{\beta}}, \tag{1-1}$$

$$g^{\alpha} - g^{\beta} = \frac{\mathrm{d}g^{\alpha}}{\mathrm{d}c_{\mathrm{B}}^{\alpha}}\left(c_{\mathrm{B}}^{\alpha} - c_{\mathrm{B}}^{\beta}\right). \tag{1-2}$$

g^{P} は相 P の単位物質量当たりのギブスエネルギーであり、c_{X}^{P} は相 P 中の成分 X の濃度である。Eqs. (1-1, 1-2)は、共通接線則と呼ばれ、二相平衡の条件式として知られている。ここでは、この式が共通接線則と呼ばれる理由を説明する。

二つの曲線 $f(x), g(x)$ について、$x = s$ における $f(x)$ の接線と $x = t$ における $g(x)$ の接線は以下の式で与えられる。

$$y = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s)(x - s) + f(s), \tag{1-3}$$

$$y = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(t)(x - t) + g(t). \tag{1-4}$$

$f(x)$ と $g(x)$ の共通接線について考えると、Eqs. (1-3, 1-4)が x について恒等式となるので、

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(t),$$

$$-s\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s) + f(s) = -t\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(t) + g(t),$$

が成立する。上式を代入すれば、下式は、

$$f(s) - g(t) = s\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s) - t\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s)(s - t)$$

となる。まとめると、

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s)=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(t), \tag{1-5}$$

$$f(s)-g(t)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s)(s-t). \tag{1-6}$$

が共通接線を表す式となる。

Eqs. (1-5, 1-6)と Eqs. (1-1, 1-2)を比較すると、Eqs. (1-1, 1-2)は二つの曲線 g^{α}, g^{β} に関する共通接線となっていることが分かる。それゆえに、二相平衡の条件式は共通接線則と呼ばれる。