数列の特性方程式

1. 二項間漸化式

以下のような二項間漸化式について考える。

$$a_{n+1} = ra_n + d\,. \tag{1-1}$$

この式を、

$$a_{n+1} - \alpha = R(a_n - \alpha), \tag{1-2}$$

のように変形する。Eq. (1-2)を変形すると、

$$a_{n+1} = R(a_n - \alpha) + \alpha = Ra_n - R\alpha + \alpha = Ra_n + (1 - R)\alpha\,,$$

となるので、Eq. (1-1)と係数比較することにより、

$$R = r\,,$$

$$d = (1 - R)\alpha = (1 - r)\alpha\,,$$

つまり、

$$R = r\,, \tag{1-3}$$

$$\alpha = \frac{d}{1 - r}\,, \tag{1-4}$$

が得られる。この式を変形すると、

$$\alpha = r\alpha + d\,, \tag{1-5}$$

が成立しており、α は Eq. (1-5)の解になっている。Eq. (1-5)は Eq. (1-1)にて、$a_{n+1} \to \alpha$, $a_n \to \alpha$ とすることで得られる方程式で特性方程式と呼ばれる。この式を解くことにより、Eq. (1-4)を得ることができ、Eq. (1-1)を Eq. (1-2)の形式に変形することができる。

Eq. (1-1)を Eq. (1-2)に変形すると、

$$b_n = a_n - \alpha\,, \tag{1-6}$$

とすると、Eq. (1-3)より、以下の等比数列が得られる。

$$b_{n+1} = rb_n .$$

これを解くと、

$$b_n = r^{n-1} b_1 ,$$

となる。Eq. (1-6)を代入すると、

$$a_n - \alpha = r^{n-1}(a_1 - \alpha),$$

$$a_n = r^{n-1}(a_1 - \alpha) + \alpha = r^{n-1}a_1 - r^{n-1}\alpha + \alpha = r^{n-1}a_1 + \left(1 - r^{n-1}\right)\alpha ,$$

となる。$n \geq 2$ として Eq. (1-4)を代入すると、

$$a_n = r^{n-1}a_1 + \left(1 - r^{n-1}\right)\alpha = r^{n-1}a_1 + \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} d = r^{n-1}a_1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1}\right) d ,$$

が得られる。つまり、Eq. (1-5)の特性方程式を解き、Eq. (1-2)の形式に変形することによって、Eq. (1-1)の一般項として以下の式を得ることができる。

$$a_n = r^{n-1}a_1 + \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} d = r^{n-1}a_1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1}\right) d . \tag{1-7}$$

Eq. (1-7)に、Eq.(1-1)を用いると、

$$\begin{aligned} a_n &= r^{n-1}a_1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1}\right) d = r^{n-1}\left(ra_0 + d\right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1}\right) d = r^n a_0 + r^{n-1} d + \left(\sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1}\right) d \\ &= r^n a_0 + \left(\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}\right) d = r^n a_0 + \frac{1 - r^n}{1 - r} d \end{aligned} ,$$

つまり、

$$a_n = r^n a_0 + \frac{1 - r^n}{1 - r} d . \tag{1-8}$$

となる。

2. 定数項の無い三項間漸化式

以下のような二項間漸化式について考える。

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n . \tag{2-1}$$

この式を、

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right), \tag{2-2}$$

のように変形する。Eq. (2-2)を変形すると、

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right) + \alpha a_{n+1} = \beta a_{n+1} - \alpha\beta a_n + \alpha a_{n+1} \\ &= \left(\alpha + \beta\right) a_{n+1} - \alpha\beta a_n \end{aligned},$$

となるので、Eq. (2-1)と係数比較することにより、

$$p = \alpha + \beta ,$$

$$q = -\alpha\beta ,$$

となる。二次方程式の解と係数の関係を考えると、α, β は以下の二次方程式の解となる。

$$x^2 - px - q = 0 . \tag{2-3}$$

Eq. (2-1)を移行して整理すると、

$$a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n = 0 ,$$

となる。両者を比較すると、Eq. (2-1)を $a_{n+2} \to x^2$, $a_{n+1} \to x$, $a_n \to 1$ とすると特性方程式 Eq. (2-3)が得られる。

Eq. (2-2)に対して、

$$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n , \tag{2-4}$$

とすると、Eq. (2-2)より、以下の等比数列が得られる。

$$b_{n+1} = \beta b_n .$$

これを解くと、

$$b_n = \beta^{n-1} b_1 ,$$

となる。Eq. (2-4)を代入すると、

$$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta^{n-1}b_1=\alpha a_n+\beta^{n-1}\left(a_2-\alpha a_1\right), \tag{2-5}$$

が成立する。α, β は Eq. (2-3)の解なので、入れ替えても成立するので、

$$a_{n+1}=\beta a_n+\alpha^{n-1}\left(a_2-\beta a_1\right), \tag{2-6}$$

が成立する。Eqs. (2-5, 2-6)より、

$$\begin{aligned}&\alpha a_n-\beta a_n+\beta^{n-1}\left(a_2-\alpha a_1\right)-\alpha^{n-1}\left(a_2-\beta a_1\right)\\&=\left(\alpha-\beta\right)a_n+\beta^{n-1}a_2-\beta^{n-1}\alpha a_1-\alpha^{n-1}a_2+\alpha^{n-1}\beta a_1\\&=\left(\alpha-\beta\right)a_n+\left(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\right)a_2-\left(\beta^{n-2}-\alpha^{n-2}\right)\alpha\beta a_1\\&=0\end{aligned},$$

$$\left(\beta-\alpha\right)a_n=\left(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\right)a_2-\left(\beta^{n-2}-\alpha^{n-2}\right)\alpha\beta a_1,$$

となる。

$\beta\neq\alpha$, $n\geq 3$ の場合、

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\left(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\right)}{\beta-\alpha}a_2-\frac{\left(\beta^{n-2}-\alpha^{n-2}\right)}{\beta-\alpha}\alpha\beta a_1=\left(\sum_{k=0}^{n-2}\alpha^{n-2-k}\beta^k\right)a_2-\left(\sum_{k=0}^{n-3}\alpha^{n-3-k}\beta^k\right)\alpha\beta a_1\\&=\left(\sum_{k=0}^{n-2}\alpha^{n-2-k}\beta^k\right)a_2-\left(\sum_{k=0}^{n-3}\alpha^{n-2-k}\beta^{k+1}\right)a_1\end{aligned},$$

となり、

$$\begin{aligned}a_n=a_n&=\frac{\left(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\right)}{\beta-\alpha}a_2-\frac{\left(\beta^{n-2}-\alpha^{n-2}\right)}{\beta-\alpha}\alpha\beta a_1\\&=\left(\sum_{k=0}^{n-2}\alpha^{n-2-k}\beta^k\right)a_2-\left(\sum_{k=0}^{n-3}\alpha^{n-2-k}\beta^{k+1}\right)a_1\end{aligned}, \tag{2-7}$$

が得られる。

$\beta=\alpha$, $n\geq 3$ の場合、Eq. (2-5)は、

$$a_{n+1}=\alpha a_n+\alpha^{n-1}b_1$$

となる。これを変形すると、

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\alpha a_n+\alpha^{n-1}b_1=\alpha a_n+\alpha^{n-1}b_1+\left(n-n\right)\alpha^{n-1}b_1\\&=\alpha a_n-n\alpha^{n-1}b_1+\left(n+1\right)\alpha^{n-1}b_1\\&=\alpha\left(a_n-n\alpha^{n-2}b_1\right)+\left(n+1\right)\alpha^{n-1}b_1\end{aligned},$$

となる。移項すると、

$$a_{n+1}-(n+1)\alpha^{n-1}b_1=\alpha\left(a_n-n\alpha^{n-2}b_1\right), \tag{2-8}$$

となる。

$$c_n=a_n-n\alpha^{n-2}b_1, \tag{2-9}$$

とすると、

$$c_{n+1}=\alpha c_n,$$

となる。これを解くと、

$$c_n=\alpha^{n-1}c_1,$$

が得られる。Eq. (2-9)を代入すると、

$$a_n-n\alpha^{n-2}b_1=\alpha^{n-1}\left(a_1-\alpha^{-1}b_1\right),$$

となる。Eq. (2-4)より、

$$\begin{aligned}a_n&=n\alpha^{n-2}b_1+\alpha^{n-1}\left(a_1-\alpha^{-1}b_1\right)=n\alpha^{n-2}b_1+\alpha^{n-1}a_1-\alpha^{n-2}b_1\\&=(n-1)\alpha^{n-2}b_1+\alpha^{n-1}a_1=(n-1)\alpha^{n-2}(a_2-\alpha a_1)+\alpha^{n-1}a_1\\&=(n-1)\alpha^{n-2}a_2-(n-1)\alpha^{n-1}a_1+\alpha^{n-1}a_1\\&=(n-1)\alpha^{n-2}a_2-(n-2)\alpha^{n-1}a_1\end{aligned},$$

つまり、

$$a_n=(n-1)\alpha^{n-2}a_2-(n-2)\alpha^{n-1}a_1, \tag{2-10}$$

となる。

ここで、Eq. (2-7)に対して、$\beta=\alpha$ を考えると、

$$\begin{aligned}a_n&=\left(\sum_{k=0}^{n-2}\alpha^{n-2-k}\beta^k\right)a_2-\left(\sum_{k=0}^{n-3}\alpha^{n-2-k}\beta^{k+1}\right)a_1=\left(\sum_{k=0}^{n-2}\alpha^{n-2-k}\alpha^k\right)a_2-\left(\sum_{k=0}^{n-3}\alpha^{n-2-k}\alpha^{k+1}\right)a_1\\&=\left(\sum_{k=0}^{n-2}\alpha^{n-2}\right)a_2-\left(\sum_{k=0}^{n-3}\alpha^{n-1}\right)a_1=\left(\sum_{k=0}^{n-2}1\right)\alpha^{n-2}a_2-\left(\sum_{k=0}^{n-3}1\right)\alpha^{n-1}a_1\\&=(n-1)\alpha^{n-2}a_2-(n-2)\alpha^{n-1}a_1\end{aligned},$$

となっており、Eq. (2-7)は Eq. (2-10)を満たしている。