All right is reserved by lifemater.com
Creation: 2021/11/1
Author: peekAboo

運動エネルギー（一次元 version）

1. 運動エネルギー

質量 m の質点に力 F が作用している状態における、一次元での運動を考える。微小距離 $\mathrm{d}x$ だけ移動したときの、F がする微小仕事 $\mathrm{d}W$ は以下の式で与えられる。

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x. \tag{1-1}$$

ここで、運動の法則により、

$$F = ma, \tag{1-2}$$

となる。ここで、a は加速度である。v を速度、x を質点の位置、t を時間とすると、以下の式が成立する。

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{1-3}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1-4}$$

Eqs. (1-2, 1-3, 1-4)を Eq. (1-1)に代入すると、

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x = mav\mathrm{d}t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\mathrm{d}t = m\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2\right)\mathrm{d}t,$$

となる。つまり、

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2\right), \tag{1-5}$$

が成立するので、これを積分すれば、

$$W = \int_0^t \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_0^t = \frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2$$

が成立するので、

$$W = \frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2, \tag{1-6}$$

となる。ここで、

$$K=\frac{1}{2}mv\left(t\right)^{2}, \tag{1-7}$$

とすると、Eq. (1-6)は以下のようになる。

$$W=K\left(t\right)-K\left(0\right), \tag{1-8}$$

この式から、F による仕事が、K の変化に対応するので、K は速度に関するエネルギーとなっていることが分かる。一般的に、K は運動エネルギーと呼ばれ、運動エネルギーは Eq. (1-7)によって評価される。

2. 等加速度運動の場合

Eqs. (1-1, 1-2)より、以下の式が成立する。

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}x=ma\mathrm{d}x,$$

等加速度運動では、**a** は定ベクトルになるため、これを積分すれば、

$$W=m\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\left(t\right)-m\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\left(0\right)=m\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{r}\left(t\right)-\mathbf{r}\left(0\right)\right)$$

つまり、

$$W=ma\Delta x, \tag{2-1}$$

$$\Delta x=x\left(t\right)-x\left(0\right), \tag{2-2}$$

となる。Eq. (1-6)に Eq. (2-1)に代入すると、

$$\frac{1}{2}mv\left(t\right)^{2}-\frac{1}{2}mv\left(0\right)^{2}=ma\Delta x,$$

となるので、

$$v\left(t\right)^{2}-v\left(0\right)^{2}=2a\Delta x, \tag{2-3}$$

が成立する。