Creation: 2021/10/24, Update: 2021/11/2
Author: peekAboo

# 二次関数

## 1. 二次関数の表現

任意の二次関数 $f(x)$ は様々な形式で表現できるが、以下の表現がよく用いられる。

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,. \tag{1-1}$$

$$f(x) = a_1(x-\alpha)(x-\beta) \tag{1-2}$$

$$f(x) = a_2(x-x_0)^2 + y_0 \tag{1-3}$$

となる。

Eqs. (1-2)について、

$$f(\alpha) = a_1(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta) = a_1 0(\alpha-\beta) = 0,$$
$$f(\beta) = a_1(\beta-\alpha)(\beta-\beta) = a_1(\beta-\alpha)0 = 0$$

となるので、 $x=\alpha,\beta$ は $f(x)=0$ の解である。

Eq. (1-3)について、

$$X = x - x_0\,,$$

$$g(X) = f(X + x_0)$$

とすると、

$$g(X) = f(X+x_0) = a_2(X+x_0-x_0)^2 + y_0 = a_2X^2 + y_0$$

となり、

$$g(-X) = a_2X^2 + y_0 = g(X)$$

となるので、 $x = x_0$ が軸となる。また、

$$f(x_0) = a_2(x_0-x_0)^2 + y_0 = y_0$$

より、頂点座標は $(x_0, y_0)$ となる。

## 2. 解と係数の関係

Eq. (1-2)を展開すると、

$$f\left(x\right)=a_1\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)=a_1\left(x^2-\left(\alpha+\beta\right)x+\alpha\beta\right)=a_1x^2-a_1\left(\alpha+\beta\right)x+a_1\alpha\beta\,,$$

となるので、Eq. (1-1)と係数比較すると、

$$a=a_1,\,b=-a_1\left(\alpha+\beta\right),\,c=a_1\alpha\beta\,,$$

となる。整理すると、

$$a=a_1\,, \tag{2-1}$$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\,, \tag{2-2}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}\,, \tag{2-3}$$

が成立する。Eq. (2-2, 2-3)は解と係数の関係として知られる式である。

## 3. 平方完成

Eq. (1-3)の表式は平方完成として知られている。Eq. (1-3)を展開すると、

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=a_2\left(x-x_0\right)^2+y_0=a_2\left(x^2-2x_0x+x_0^2\right)+y_0\\&=a_2x^2-2a_2x_0x+a_2x_0^2+y_0\end{aligned}\,,$$

となる。Eq. (1-1)と係数比較すると、

$$a=a_2,\,b=-2a_2x_0,\,c=a_2x_0^2+y_0\,,$$

が成立するので、

$$x_0=-\frac{b}{2a}\,,$$

$$y_0 = c - a_2 x_0^2 = -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c\,,$$

となる。つまり、

$$a_2 = a\,, \tag{3-1}$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}\,, \tag{3-2}$$

$$y_0 = -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c\,, \tag{3-3}$$

が成立する。

## 4. 判別式

$f(x) = 0$ の解を考える。Eq. (1-2)より、

$$f(x) = a_2(x - x_0)^2 + y_0 = 0\,,$$

$$(x - x_0)^2 = -\frac{y_0}{a}\,,$$

$$x - x_0 = \pm\sqrt{-\frac{y_0}{a}}\,,$$

$$x = x_0 \pm \sqrt{-\frac{y_0}{a}}\,,$$

となる。さらに、Eqs. (3-1)-(3-3)より、

$$-\frac{y_0}{a} = -\frac{1}{a}\left(-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c\right) = -\frac{1}{a}\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{4a} - c\right) = \frac{1}{4a^2}\left(b^2 - 4ac\right),$$

となるので、

$$x = x_0 \pm \sqrt{-\frac{y_0}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2}\left(b^2 - 4ac\right)} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{|2a|}\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が成立する。つまり、$f(x)=0$ の解は、

$$x = x_0 \pm \sqrt{-\frac{y_0}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{\left(b^2 - 4ac\right)}}{2a}, \tag{4-1}$$

にて与えられる。

ここで、判別式 $D$ は、

$$D = b^2 - 4ac, \tag{4-2}$$

にて定義される。$D$ を用いると、$f(x)=0$ の解は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \tag{4-3}$$

となる。

(i) $D<0$ の時

Eq. (4-3)より $f(x)=0$ の解は実数ではなくなる。$f(x)=0$ の解はグラフ的には $f(x)$ と $y=0$ の交点の $x$ 座標に対応するので、$D<0$ は $f(x)$ が $y=0$ と共有点を持たないことを意味する。

(ii) D=0 の時

Eq. (4-3)より、

$$\alpha = \beta = \frac{-b}{2a}, \tag{4-4}$$

となる。このように二つの解は同じ値になるので、$D=0$ は重解に対応し、グラフ的には、$f(x)$ が $y=0$ に頂点で接することを意味する。なお、Eq. (4-2)より、$D$=0 となるのは、

$$c = \frac{b^2}{4a}, \tag{4-5}$$

の時である。

また、判別式は頂点座標とも関係している。Eq. (3-3)を変形すると、

$$y_0 = -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = -a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \frac{-b^2}{4a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-D}{4a}$$

となるので、

$$y_0 = \frac{-D}{4a}, \tag{4-6}$$

が成立する。