

等加速度運動

1. 加速度と速度の定義

質点の位置ベクトルを \mathbf{r} とすると、速度 \mathbf{v} 、加速度 \mathbf{a} は以下の式で定義されている。

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (1-1)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1-2)$$

ここで、 t は時間である。

2. 等加速度運動

\mathbf{a} が定ベクトルであるときの運動を考える。Eq. (1-2)より、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a},$$

となるので、これを積分すると、

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \int_0^t \mathbf{a} dt,$$

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = [\mathbf{v}]_0^t = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0),$$

$$\int_0^t \mathbf{a} dt = [\mathbf{a}t]_0^t = \mathbf{a}t,$$

より、

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{v}(0), \quad (2-1)$$

となる。さらに、Eqs. (1-1, 2-1)より、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{v}(0) ,$$

となるので、これを積分すると、

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^t \mathbf{a}t + \mathbf{v}(0) dt ,$$

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = [\mathbf{r}]_0^t = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0) ,$$

$$\int_0^t \mathbf{a}t + \mathbf{v}(0) dt = \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}(0)t \right]_0^t = \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}(0)t ,$$

より、

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}(0)t + \mathbf{r}(0) , \quad (2-2)$$

となる。