Creation: 2021/10/23
Author: peekAboo

対数関数の性質

1. 指数関数の性質

a, b を正の実数、x, y を実数とすると、指数関数は以下の性質を有する。

$$a^x a^y = a^{x+y}, \tag{1-1}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, \tag{1-2}$$

$$\left(ab\right)^x = a^x b^x, \tag{1-3}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}. \tag{1-4}$$

また、a^0 を考えると、Eqs. (1-1, 1-4)より、

$$a^0 = a^{1-1} = a^1 a^{-1} = a\frac{1}{a} = 1,$$

つまり、

$$a^0 = 1. \tag{1-5}$$

となる。
また、x, y が有理数の場合、負の実数 a, b について Eqs, (1-1)-(1-5)が成立する。

2. 対数関数の性質

対数関数の性質は指数関数の性質から導ける。

$$A = a^x, B = a^y. \tag{2-1}$$

とすると、

$$x = \log_a A,\ y = \log_a B\ , \tag{2-2}$$

となる。よって、Eqs. (1-1)-(1-4)を用いると、

$$\log_a(AB) = \log_a\left(a^x a^y\right) = \log_a\left(a^{x+y}\right) = x + y = \log_a A + \log_a B\ ,$$

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = \log_a\left(a^x\left(a^y\right)^{-1}\right) = \log_a\left(a^x a^{-y}\right) = \log_a\left(a^{x-y}\right) = x - y = \log_a A - \log_a B\ ,$$

が成立する。つまり、以下の式が成立する。

$$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B, \tag{2-3}$$

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B\ . \tag{2-4}$$

また、

$$a = c^z\ , \tag{2-5}$$

とすると、Eq. (1-2)より、

$$\log_c A = \log_c a^x = \log_c\left(c^z\right)^x = \log_c c^{xz} = xz = \left(\log_a A\right)\left(\log_c a\right),$$

となる。よって、

$$\log_a A = \frac{\log_c A}{\log_c a} \tag{2-6}$$

が成立する。