Creation: 2021/8/18, Update: 2021/10/1
Author: peekAboo

N 分の一の確率

1. N 回であたる確率

N 分の一の確率であたるくじを考える。このくじを N 回ひいて少なくとも一回当たりが出る確率 $P(N)$ は余事象を考える事で、容易に求めることができる。
一回くじをひいたときに、当たる確率 p と外れる確率 $1-p$ はそれぞれ以下のように表現できる。

$$p=\frac{1}{N}, \tag{1-1}$$

$$1-p=\frac{N-1}{N}. \tag{1-2}$$

N 回くじをひいて一度もあたりが出ない確率 $1-P(N)$ は、以下のように計算できる。

$$1-P(N)=(1-p)^N=\left(\frac{N-1}{N}\right)^N.$$

よって、

$$P(N)=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N, \tag{1-3}$$

となる。

Eq. (1-3)を具体的に計算すると Table 1 のようになる。

Table 1

N	1	2	3	4	5	10	100	10000
$P(N)$ /%	100	75	70.4	68.4	67.2	65.1	63.4	63.2

Tabel1 の計算で確認された、Eq. (1-3)の収束性を数学的に確認する。Eq. (1-3)より、

$$\lim_{N\to\infty} P(N) = \lim_{N\to\infty}\left\{1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right\} = 1-\lim_{N\to\infty}\left\{\left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right\},$$

となるので、$\lim_{N\to\infty} P(N)$ を計算するためには、$\lim_{N\to\infty}\left\{\left((N-1)/N\right)^N\right\}$ を求めればいい。この式が自然対数の底 e の定義式、

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = e, \tag{1-4}$$

に似ていることに注意して、以下のように式を変形する。

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N = \left(\frac{1}{\frac{N}{N-1}}\right)^N = \frac{1^N}{\left(\frac{N}{N-1}\right)^N} = \frac{1^N}{\left(\frac{N-1+1}{N-1}\right)^N} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{N-1}\right)^N} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)^{(N-1)+1}}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)^{(N-1)}} = \left\{\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)^{(N-1)}\right\}^{-1}.$$

$N\to\infty$ において、$N-1\to\infty$ であるため、

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right\} = \lim_{N-1\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)^{(N-1)}\right\}^{-1},$$

となる。ここで、

$$\lim_{N-1\to\infty}\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right) = 1+0 = 1,$$

であり、Eq. (1-4)より、

$$\lim_{N-1\to\infty}\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)^{(N-1)} = e,$$

となるため、

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right\}=\lim_{N-1\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right)^{(N-1)}\right\}^{-1}=\frac{1}{e},$$

となる。この式を代入することによって以下の極限が得られる。

$$\lim_{N\to\infty}P(N)=1-\frac{1}{e}. \tag{1-5}$$

Eq. (1-5)を具体的に計算すると、$\lim_{N\to\infty}P(N)=63.212\cdots\%$ となる。

Eq. (1-3)を計算すると、$P(N)$ は Fig. 1-1 のようになる。N の増加に伴い $P(N)$ が約 63% に収束していることが確認できる。

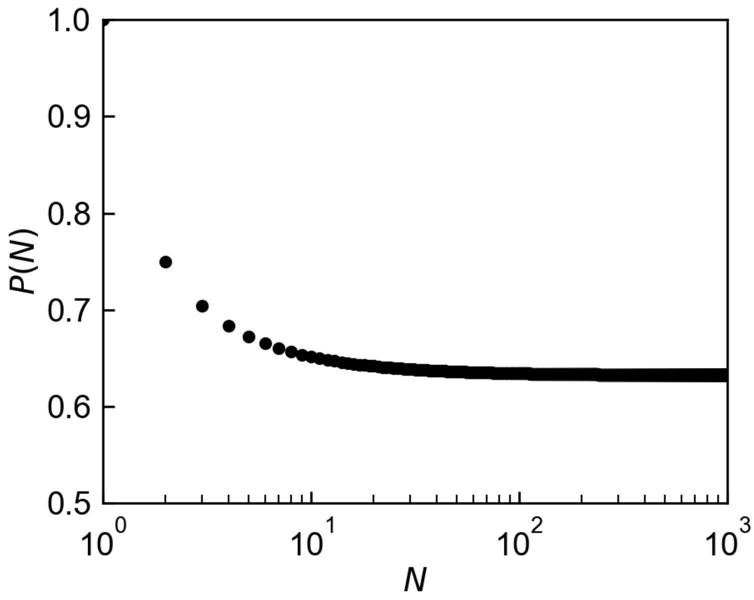

Fig. 1-1

2. M 回であたる確率

N 分の 1 の確率であたるくじを M 回ひいて少なくとも一回当たりが出る確率 $P(N,M)$ は、$P(N)$ と同様に余事象を考える事で、容易に求めることができる。

$$1-P(N,M)=(1-p)^M=\left(\frac{N-1}{N}\right)^M,$$

よって、

$$P(N,M)=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^{M}, \tag{2-1}$$

となる。

【$M=kN$ の場合】

k を整数として $M=kN$ の場合を考えると、Eq. (2-1)から以下の式が得られる。

$$P(N,kN)=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^{kN}, \tag{2-2}$$

ここで、

$$x=\left(\frac{N-1}{N}\right)^{N}, \tag{2-3}$$

とすると、

$$P(N,kN)=1-\left(\left(\frac{N-1}{N}\right)^{N}\right)^{k}=1-x^{k},$$

$$P(N)=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^{N}=1-x$$

となる。ここで、$P(N,kN)$ と $P(N)$ の比を考えると、

$$\frac{P(N,kN)}{P(N)}=\frac{1-x^{k}}{1-x}=\frac{(1-x)\left(\sum_{i=0}^{k-1}x^{i}\right)}{1-x}=\sum_{i=0}^{k-1}x^{i},$$

つまり、

$$\frac{P(N,kN)}{P(N)}=\sum_{i=0}^{k-1}x^{i}, \tag{2-4}$$

となる。さらに $P(N,(k+1)N)$ と $P(N,kN)$ の差を計算すると以下の式が得られる。

$$P\left(N,(k+1)N\right)-P\left(N,kN\right)=1-x^{k+1}+1-x^{k}=(1-x)\sum_{i=0}^{k}x^{i}+(1-x)\sum_{i=0}^{k-1}x^{i}$$
$$=(1-x)\left\{\sum_{i=0}^{k}x^{i}+\sum_{i=0}^{k-1}x^{i}\right\}=(1-x)x^{k}=P(N)x^{k},$$

$$P\left(N,(k+1)N\right)-P\left(N,kN\right)=P(N)x^{k}. \tag{2-5}$$

Eq. (2-5)は k に関する指数関数であり、$0<x<1$ であるため、Eq. (2-5)は指数関数的に減少する。Eq. (2-2)と Eq. (2-5)を数値計算すると、Figs. 2-2, 2-3 のようになる。

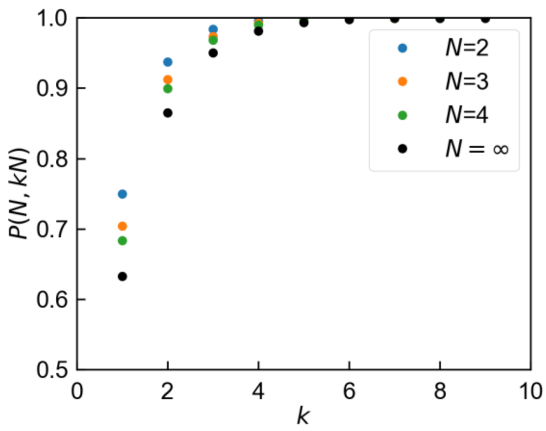

Fig. 2-1

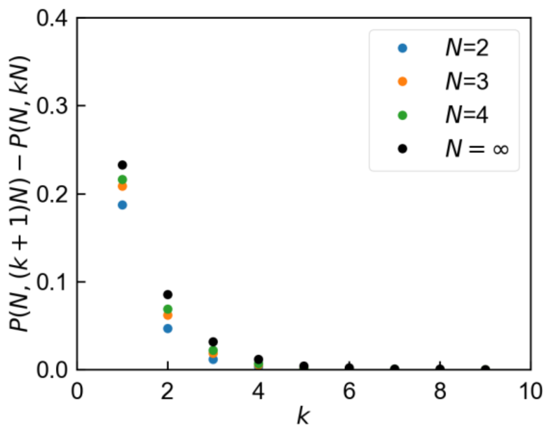

Fig. 2-2

3. あたりが出るまでのくじを引く回数の期待値

N 分の 1 の確率であたるくじが、M 回目にはじめてあたる確率を $P^{\mathrm{f}}\left(N,M\right)$ とする。この場合、M-1 回目までは一度もあたりを引いておらず、M 回目であたりを引く必要があるので、以下のようにできる。

$$P^{\mathrm{f}}\left(N,M\right)=\frac{1}{N}\left\{1-P\left(N,M-1\right)\right\}=\frac{1}{N}\left(1-p\right)^{M-1}=\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{M-1}\left(M\geq 2\right),$$

$$P^{\mathrm{f}}\left(N,1\right)=\frac{1}{N},$$

下式は上式でも成立するので、まとめて以下の式で表現できる。

$$P^{\mathrm{f}}\left(N,M\right)=\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{M-1}. \tag{3-1}$$

このくじをあたるまで引く場合、くじを引く回数に関する期待値 N_{E} は以下の式で与えられる。

$$N_{\mathrm{E}}=\sum_{M=1}^{\infty}MP^{\mathrm{f}}\left(N,M\right), \tag{3-2}$$

ここで、

$$S\left(M\right)=\sum_{m=1}^{M}mP^{\mathrm{f}}\left(N,m\right)=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{N}m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{m-1}=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{N}mr^{m-1},$$

$$r=\frac{N-1}{N}$$

とする。これは典型的な数列の総和問題であるので、以下のように計算することができる。

$$\begin{aligned}
rS(M)-S(M) &= x\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{N}mr^{m-1}-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{N}mr^{m-1}=\frac{1}{N}\left[\sum_{m=1}^{M}mr^{m}-\sum_{m=1}^{M}mr^{m-1}\right]\\
&=\frac{1}{N}\left[\sum_{m=2}^{M+1}(m-1)r^{m-1}-\sum_{m=1}^{M}mr^{m-1}\right]=\frac{1}{N}\left[Mr^{M}+\sum_{m=2}^{M}(m-1)r^{m-1}-\sum_{m=2}^{M}mr^{m-1}-r^{0}\right]\\
&=\frac{1}{N}\left[Mr^{M}+\sum_{m=2}^{M}\left\{(m-1)r^{m-1}-mr^{m-1}\right\}-1\right]=\frac{1}{N}\left[Mr^{M}-\sum_{m=2}^{M}r^{m-1}-1\right]\\
&=\frac{1}{N}\left(Mr^{M}-\frac{r-r^{M}}{1-r}-1\right)
\end{aligned},$$

$$(r-1)S(M)=\frac{1}{N}\left(Mr^{M}-\frac{r-r^{M}}{1-r}-1\right),$$

$$\begin{aligned}
S(M)&=\frac{1}{N}\frac{1}{r-1}\left(Mr^{M}-\frac{r-r^{M}}{1-r}-1\right)=\frac{1}{N}\frac{1}{\frac{N-1}{N}-1}\left(Mr^{M}-\frac{r-r^{M}}{1-r}-1\right)\\
&=\frac{1}{N-1-N}\left(Mr^{M}-\frac{r-r^{M}}{1-r}-1\right)=1+\frac{r-r^{M}}{1-r}-Mr^{M}
\end{aligned}.$$

ここで、

$$N_{\mathrm{E}}=\lim_{M\to\infty}S(M),$$

であるので、

$$N_{\mathrm{E}}=\lim_{M\to\infty}S(M)=\lim_{M\to\infty}\left(1+\frac{r-r^{M}}{1-r}-Mr^{M}\right)=1+\frac{r}{1-r}-\lim_{M\to\infty}\frac{r^{M}}{1-r}-\lim_{M\to\infty}Mr^{M},$$

となる。$0<r<1$なので、第 3, 4 項はロピタルの定理を用いれば、以下のように計算できる。

$$\lim_{M\to\infty}\frac{r^{M}}{1-r}=0,$$

$$\lim_{M\to\infty}Mr^{M}=\lim_{M\to\infty}\frac{M}{\left(r^{-1}\right)^{M}}=\lim_{M\to\infty}\frac{M}{\left(r^{-1}\right)^{M}}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\left(\ln r^{-1}\right)\left(r^{-1}\right)^{M}}=0.$$

よって、

$$N_{\mathrm{E}} = 1 + \frac{r}{1-r} = 1 + \frac{\frac{N-1}{N}}{1 - \frac{N-1}{N}} = 1 + \frac{N-1}{N-(N-1)} = 1 + N - 1 = N \,,$$

となる。まとめると、以下の期待値が得られる。

$$N_{\mathrm{E}} = N \,. \tag{3-3}$$

4. M 回くじを引いた時のあたる回数の期待値

N 分の 1 の確率であたるくじを M 回引いたときに、あたりが出る回数の期待値を $N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{w}}(M)$ とすると、$N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{w}}(M)$ は以下の式で与えられる。

$$N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{w}}(M) = \sum_{i=0}^{M} i\, {}_M C_i\, p^i (1-p)^{M-i} \,, \tag{4-1}$$

ここで、

$$f(x) = (a+x)^n,$$

という関数を考えると、

$$f(x) = (a+x)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i\, a^{n-i} x^i \,, \tag{4-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = n(a+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\, {}_n\mathrm{C}_i\, a^{n-i} x^{i-1} \,, \tag{4-3}$$

となるので、Eq. (4-3)を用いると、Eq. (4-1)は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{w}}(M) &= \sum_{i=0}^{M} i\, {}_M C_i\, p^i (1-p)^{M-i} = p \sum_{i=0}^{M} i\, {}_M C_i\, p^{i-1} (1-p)^{M-i} = \sum_{i=0}^{M} ip\, {}_M C_i\, p^{i-1} (1-p)^{M-i} \\ &= pM(1-p+p)^{M-1} = pM = \frac{1}{N} M \end{aligned} .$$

つまり、以下の期待値が得られる。

$$N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{w}}\left(M\right)=\frac{M}{N}. \tag{4-4}$$

続いて分散について考える。N 分の 1 の確率であたるくじを M 回引いたときに、あたりが出る回数の分散を$\sigma_{\mathrm{w}}^{2}\left(M\right)$とすると、

$$\sigma_{\mathrm{w}}^{2}\left(M\right)=\sum_{i=0}^{M}\left(i-\frac{M}{N}\right)^{2}{}_{M}C_{i}p^{i}\left(1-p\right)^{M-i}, \tag{4-5}$$

となる。Eq. (4-3)をさらに微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}f\left(x\right)=n\left(n-1\right)\left(a+x\right)^{n-2}=\sum_{i=0}^{n}i\left(i-1\right){}_{n}\mathrm{C}_{i}a^{n-i}x^{i-2}, \tag{4-6}$$

となるので、Eq. (4-5)を展開すると以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{w}}^{2}\left(M\right)&=\sum_{i=0}^{M}\left(i-\frac{M}{N}\right)^{2}{}_{M}C_{i}p^{i}\left(1-p\right)^{M-i}\\
&=\sum_{i=0}^{M}i^{2}{}_{M}C_{i}p^{i}\left(1-p\right)^{M-i}-2\frac{M}{N}\sum_{i=0}^{M}i{}_{M}C_{i}p^{i}\left(1-p\right)^{M-i}+\left(\frac{M}{N}\right)^{2}\sum_{i=0}^{M}{}_{M}C_{i}p^{i}\left(1-p\right)^{M-i}\\
&=\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{M}\left(i-1\right)i{}_{M}C_{i}p^{i}\left(1-p\right)^{M-i}+\sum_{i=0}^{M}i{}_{M}C_{i}p^{i}\left(1-p\right)^{M-i}\\&-2\frac{M}{N}\sum_{i=0}^{M}i{}_{M}C_{i}p^{i}\left(1-p\right)^{M-i}+\left(\frac{M}{N}\right)^{2}\left(1-p+p\right)^{M}\end{aligned}\right\}\\
&=p^{2}\sum_{i=0}^{M}\left(i-1\right)i{}_{M}C_{i}p^{i-2}\left(1-p\right)^{M-i}+\left(1-2\frac{M}{N}\right)p\sum_{i=0}^{M}i{}_{M}C_{i}p^{i-1}\left(1-p\right)^{M-i}+\left(\frac{M}{N}\right)^{2}\\
&=p^{2}M\left(M-1\right)+\left(1-2\frac{M}{N}\right)pM+\left(\frac{M}{N}\right)^{2}=\frac{M\left(M-1\right)}{N^{2}}+\left(1-2\frac{M}{N}\right)\frac{M}{N}+\left(\frac{M}{N}\right)^{2}\\
&=\frac{1}{N^{2}}\left(M^{2}-M+NM-2M^{2}+M^{2}\right)=\frac{1}{N^{2}}\left(-M+NM\right)=\frac{M\left(N-1\right)}{N^{2}}
\end{aligned},$$

つまり、

$$\sigma_{\mathrm{w}}^{2}\left(M\right)=\frac{M\left(N-1\right)}{N^{2}}, \tag{4-7}$$

$$\sigma_{\mathrm{w}}^{2}\left(N\right)=\frac{N-1}{N}. \tag{4-8}$$

となる。