Creation: 2021/10/30
Author: peekAboo

一般的な数列の総和

1. 総和に関する関係式

総和記号Σについて以下の関係式が成立する。

$$\sum_{i=m}^{n} k a_i = k \sum_{i=m}^{n} a_i \ , \tag{1-1}$$

$$\sum_{i=m}^{n} \left(a_i + b_i \right) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \ , \tag{1-2}$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=l}^{n} a_i - \sum_{i=l}^{m} a_i \ . \tag{1-3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \ , \tag{1-4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n \left(n+1 \right), \tag{1-5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n \left(n+1 \right) \left(2n+1 \right), \tag{1-6}$$

ここで、k は定数、$\{a_i\}, \{b_i\}$ は数列である。

2. 等差数列の総和

等差数列

$$a_k = a_1 + d \left(k-1 \right), \tag{2-1}$$

の総和を考える。Eqs. (1-1, 1-2)より、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_1 + d \left(k-1 \right) \right\} = \sum_{k=1}^{n} a_1 + \sum_{k=1}^{n} dk + \sum_{k=1}^{n} \left(-d \right) = a_1 \sum_{k=1}^{n} 1 + d \sum_{k=1}^{n} k - d \sum_{k=1}^{n} 1 \ ,$$

となる。Eqs. (1-4, 1-5)より、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \sum_{k=1}^{n} 1 + d \sum_{k=1}^{n} k - d \sum_{k=1}^{n} 1 = a_1 n + d \frac{1}{2} n(n+1) - dn$$
$$= a_1 n + dn \frac{1}{2}(n+1-2) = a_1 n + \frac{d}{2} n(n-1) ,$$

となる。つまり、以下の式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 n + \frac{d}{2} n(n-1) . \tag{2-2}$$

3. 等比数列の総和

等比数列

$$a_k = a_1 r^{k-1} , \tag{3-1}$$

の総和を考える。ただし、$r \neq 1$とする。Eqs. (1-1, 1-2)より、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 r^{k-1} = a_1 \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} ,$$

となる。ここで、$n \geq 2$ とすると、

$$(1-r) \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} - r \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} r^{k} = r^0 + \sum_{k=2}^{n} r^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} r^{k} - r^n$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} r^k - \sum_{k=1}^{n-1} r^k - r^n = 1 - r^n ,$$

より、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} ,$$

が成立する。$n = 1$ の時、

$$a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = a_1 \frac{1-r^1}{1-r} = a_1 ,$$

となるので、以下の式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}. \tag{3-2}$$

4. その他の数列の総和

数列

$$a_k = a_1 r^{k-1} k, \tag{4-1}$$

の総和を考える。ただし、$r \neq 1$とする。Eqs. (1-1, 1-2)より、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 r^{k-1} k = a_1 \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} k,$$

となる。ここで、

$$r\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = (r-1)\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

を考える。$n \geq 2$ とすると、

$$\begin{aligned}
(r-1)\sum_{k=1}^{n} a_k &= ra_1 \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} k - a_1 \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} k = a_1\left(\sum_{k=1}^{n} r^k k - \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} k\right) \\
&= a_1\left(r^n n + \sum_{k=1}^{n-1} r^k k - \sum_{k=2}^{n} r^{k-1} k - r^0\right) = a_1\left(r^n n + \sum_{k=1}^{n-1} r^k k - \sum_{k=1}^{n-1} r^k (k+1) - 1\right) \\
&= a_1\left(nr^n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} r^k (k-k-1)\right) = a_1\left(nr^n - 1 - r\sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1}\right) \\
&= a_1\left(nr^n - 1 - r\frac{1-r^{n-1}}{1-r}\right) = a_1 \frac{1}{1-r}\left(nr^n(1-r) - (1-r) - r + r^n\right) \\
&= a_1 \frac{1}{1-r}\left(nr^n(1-r) - 1 + r^n\right) = a_1 \frac{1}{r-1}\left(nr^n(r-1) + 1 - r^n\right)
\end{aligned}$$

より、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{1}{(r-1)^2}\left(nr^n(r-1) + 1 - r^n\right), \tag{4-2}$$

となる。n=1 のとき、

$$
\begin{aligned}
& a_1 \frac{1}{(r-1)^2}\left(nr^n(r-1)+1-r^n\right) = a_1 \frac{1}{(r-1)^2}\left(1r^1(r-1)+1-r^1\right) \\
& = a_1 \frac{1}{(r-1)^2}\left(r(r-1)+1-r\right) = a_1 \frac{(r-1)}{(r-1)^2}(r-1) = a_1
\end{aligned}
,
$$

となるため、Eq. (4-2)は n=1 のときも成り立つ。