Creation: 2021/10/30
Author: peekAboo

数列の総和（べき乗の総和）

1. 総和記号の性質

総和記号Σについて以下の関係式が成立する。

$$\sum_{i=m}^{n} ka_i = k\sum_{i=m}^{n} a_i \ , \tag{1-1}$$

$$\sum_{i=m}^{n}\left(a_i + b_i\right) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \ , \tag{1-2}$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=l}^{n} a_i - \sum_{i=l}^{m} a_i \ . \tag{1-3}$$

ここで、k は定数、$\{a_i\},\{b_i\}$は数列である。

2. べき乗の総和

pを自然数とすると、二項定理により、以下の式が成立する。

$$\left(i+1\right)^{p+1} - i^{p+1} = \left(\sum_{q=0}^{p+1} {}_{p+1}\mathrm{C}_q i^q\right) - i^{p+1} = i^{p+1} + \left(\sum_{q=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_q i^q\right) - i^{p+1} = \sum_{q=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_q i^q \ .$$

つまり、

$$\left(i+1\right)^{p+1} - i^{p+1} = \sum_{q=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_q i^q \ , \tag{2-1}$$

が成立する。ここで、

$$S_q = \sum_{i=1}^{n} i^q \ , \tag{2-2}$$

とする。Eq. (2-1)の両辺に対して i について総和をとると、

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{(i+1)^{p+1}-i^{p+1}\right\}=\sum_{i=1}^{n}(i+1)^{p+1}-\sum_{i=1}^{n}i^{p+1}=(n+1)^{p+1}+\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)^{p+1}-\sum_{i=2}^{n}i^{p+1}-1$$
$$=(n+1)^{p+1}+\sum_{i=2}^{n}i^{p+1}-\sum_{i=2}^{n}i^{p+1}-1=(n+1)^{p+1}-1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{q=0}^{p}{}_{p+1}\mathrm{C}_q i^q\right\}=\sum_{q=0}^{p}\sum_{i=1}^{n}\left({}_{p+1}\mathrm{C}_q i^q\right)=\sum_{q=0}^{p}\left\{{}_{p+1}\mathrm{C}_q\sum_{i=1}^{n}i^q\right\}=\sum_{q=0}^{p}\left({}_{p+1}\mathrm{C}_q S_q\right)$$
$$={}_{p+1}\mathrm{C}_p S_p+\sum_{q=0}^{p-1}\left({}_{p+1}\mathrm{C}_q S_q\right)=(p+1)S_p+\sum_{q=0}^{p-1}\left({}_{p+1}\mathrm{C}_q S_q\right),$$

となるので、

$$(p+1)S_p+\sum_{q=0}^{p-1}\left({}_{p+1}\mathrm{C}_q S_q\right)=(n+1)^{p+1}-1,$$

$$S_p=\frac{1}{p+1}\left\{(n+1)^{p+1}-1-\sum_{q=0}^{p-1}\left({}_{p+1}\mathrm{C}_q S_q\right)\right\}=\frac{1}{p+1}\left\{(n+1-1)\left(\sum_{q=0}^{p}(n+1)^q\right)-\sum_{q=0}^{p-1}\left({}_{p+1}\mathrm{C}_q S_q\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{p+1}\left\{n\sum_{q=0}^{p}(n+1)^q-\sum_{q=0}^{p-1}\left({}_{p+1}\mathrm{C}_q S_q\right)\right\},$$

となる。つまり、以下の式が成立する。

$$S_p=\frac{1}{p+1}\left\{n\sum_{q=0}^{p}(n+1)^q-\sum_{q=0}^{p-1}\left({}_{p+1}\mathrm{C}_q S_q\right)\right\}. \tag{2-4}$$

p=0 のとき、Eq. (1-1)より、

$$S_0=\sum_{i=1}^{n}1=n,$$

つまり、

$$S_0=n, \tag{2-5}$$

が成立する。

p=1 の時、Eq. (2-4)より、

$$S_1=\frac{1}{1+1}\left\{n\sum_{q=0}^{1}(n+1)^q-\sum_{q=0}^{0}\left({}_2\mathrm{C}_q S_q\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{n\left(n+1+(n+1)^0\right)-{}_2\mathrm{C}_0S_0\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{n(n+1+1)-{}_2\mathrm{C}_0S_0\right\}==\frac{1}{2}\left\{n(n+2)-{}_2\mathrm{C}_0S_0\right\},$$

となる。ここで、Eq. (2-5)より、

$$S_1=\frac{1}{2}\left\{n\left(n+2\right)-{}_2\mathrm{C}_0S_0\right\}=\frac{1}{2}\left\{n\left(n+2\right)-n\right\}=\frac{1}{2}n\left(n+2-1\right)=\frac{1}{2}n\left(n+1\right),$$

つまり、

$$S_1=\frac{1}{2}n\left(n+1\right), \tag{2-6}$$

となる。

p=2 の時、Eq. (2-4)より、

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2+1}\left\{n\sum_{q=0}^{2}\left(n+1\right)^q-\sum_{q=0}^{2-1}\left({}_{2+1}\mathrm{C}_qS_q\right)\right\}=\frac{1}{3}\left\{n\left(\left(n+1\right)^2+\left(n+1\right)+1\right)-\sum_{q=0}^{1}\left({}_3\mathrm{C}_qS_q\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left\{n\left(\left(n+1\right)^2+\left(n+1\right)+1\right)-{}_3\mathrm{C}_1S_1-{}_3\mathrm{C}_0S_0\right\}=\frac{1}{3}\left\{n\left(\left(n+1\right)^2+\left(n+1\right)+1\right)-3S_1-S_0\right\}\end{aligned},$$

つまり、ここで、Eqs. (2-5, 2-6)より、

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{3}\left\{n\left(\left(n+1\right)^2+\left(n+1\right)+1\right)-3S_1-S_0\right\}=\frac{1}{3}\left\{n\left(\left(n+1\right)^2+\left(n+1\right)+1\right)-3\frac{1}{2}n\left(n+1\right)-n\right\}\\&=\frac{1}{6}n\left\{2\left(n+1\right)^2+2\left(n+1\right)+2-3\left(n+1\right)-2\right\}=\frac{1}{6}n\left\{2\left(n+1\right)^2+2\left(n+1\right)-3\left(n+1\right)\right\}\\&=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left\{2n+2+2-3\right\}=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\end{aligned},$$

つまり、

$$S_2=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right), \tag{2-7}$$

となる。

【Eq. (2-6)の別導出】

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}i=\sum_{j=n}^{1}j=\sum_{i=1}^{n}\left(n+1-i\right),$$

とできるので、

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i+n+1-i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n+1)\end{aligned},$$

となる。Eq. (1-1)より、

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{2}n(n+1),$$

となり、Eq. (2-6)が導ける。